LEONARDO DA VINCI Y LA CUADRATURA HUMANA

Sin duda, uno de los mas famosos dibujos de Leonardo da Vinci es el llamado "hombre de Vitruvio"

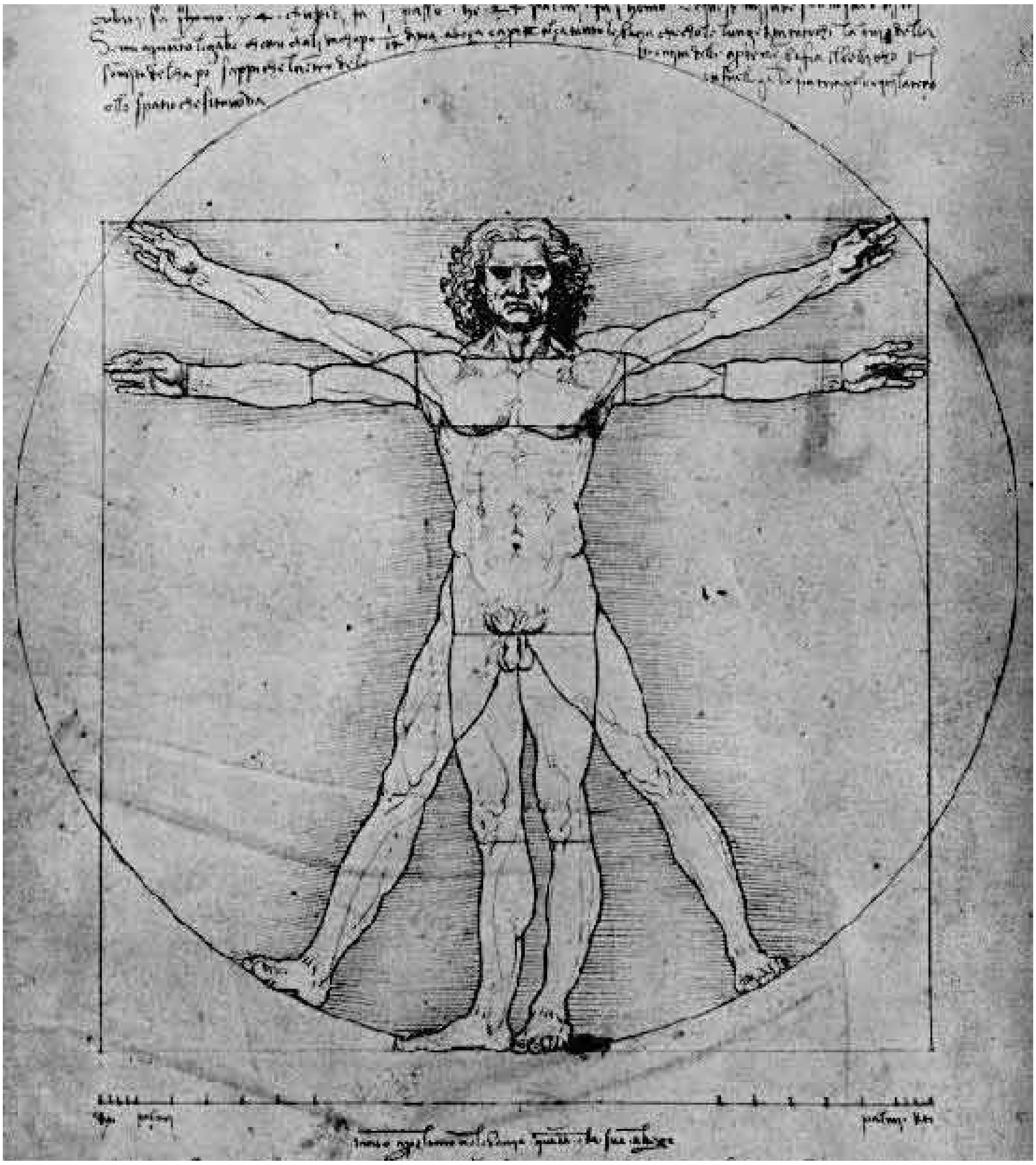


Fig 1.

Este dibujo se ha convertido en un auténtico símbolo ya que recoge varias de las ideas claves del pensamiento renacentista: el hombre medida de todas las cosas, la belleza ajustada a cánones, equilibrio, proporción y demás.

El dibujo responde perfectamente al esquema descrito por Vitruvio

"... y también el ombligo es el punto central natural del cuerpo humano, ya que si un hombre se echa sobre la espalda, con las manos y los pies extendidos, y coloca la punta de un compás en su ombligo, los dedos de las manos y los de los pies tocarán la circunferencia del círculo que así trazamos. Y de la misma forma que el cuerpo humano nos da un círculo que lo rodea, también podemos hallar un cuadrado donde igualmente esté encerrado el cuerpo humano. Porque si medimos la distancia desde las plantas de los pies hasta la punta de la cabeza y luego aplicamos esta misma medida a los brazos extendidos, encontraremos que la anchura es igual a la longitud, como en el caso de superficies planas que son perfectamente cuadradas".

(tomado de http://centros5.pntic.mec.es/ies.juan.de.mairena/leonardovi.htm)

En resumen: un círculo y un cuadrado que delimitan las dimensiones de la figura humana.

El hombre de Vitruvio y la razón áurea

¿Cómo trazó Leonardo el círculo y el cuadrado? ¿Que relación guardan ambas figuras?

Estas sencillas preguntas no tienen a mí entender una respuesta igualmente sencilla. Veamos:

Si seguimos a Vitruvio al pie de la letra hemos de empezar por trazar el círculo y, como se repite a menudo
(ver p.ej.:
http://www.pntic.mec.es/pagtem/arte/pintura/aurea3.htm
http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/goldslide/jbgoldslide.htm
http://thealchemicalegg.com/leotaroN.html)

el mismo **ombligo divide la altura por la razón áurea** por lo que el lado del cuadrado queda perfectamente definido. Es decir, sean:

D = diámetro del círculo y por tanto D/2 su radio

L = lado del cuadrado, por tanto: L/D/2 = 2L/D = fi = 1,618033989...

En virtud de esto Leonardo habría construido el cuadrado a partir del círculo siguiendo una conocida construcción de la razón áurea (ver Fig 2)

Se halla la mitad del radio (D/2 = a) y con centro en tal punto medio y radio la distancia al extremo del radio horizontal se traza un arco que corte al diámetro vertical, esto nos da el punto p y por tanto el segmento b de modo que a+b = L lado del cuadrado.

El cuadrado obtenido por tal procedimiento sin duda se parece al del original pero...
¿es exactamente así?...

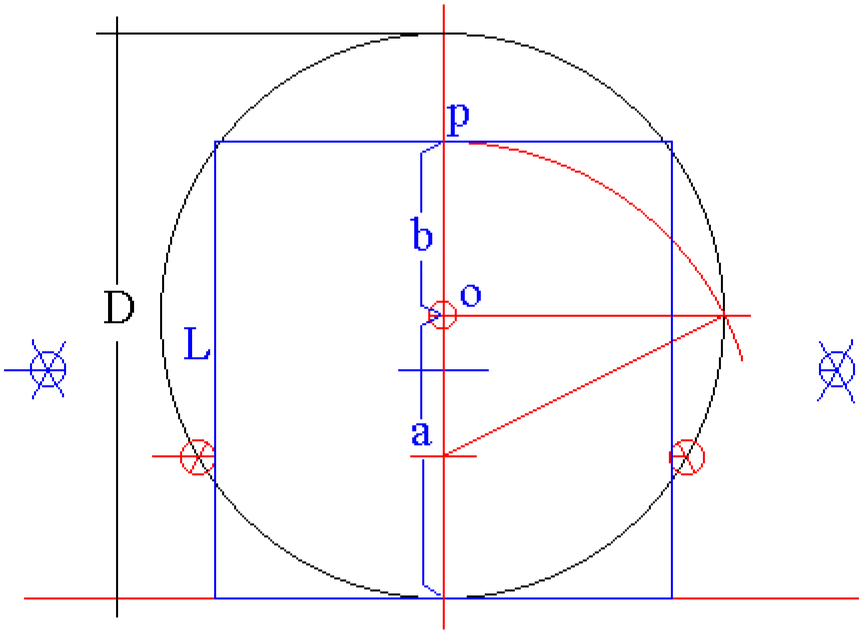
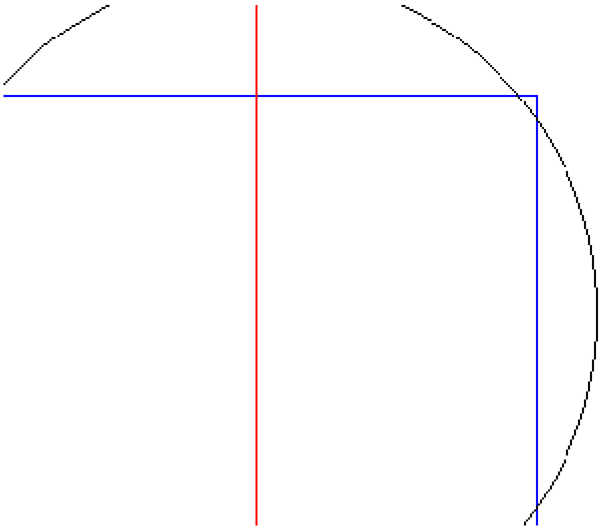
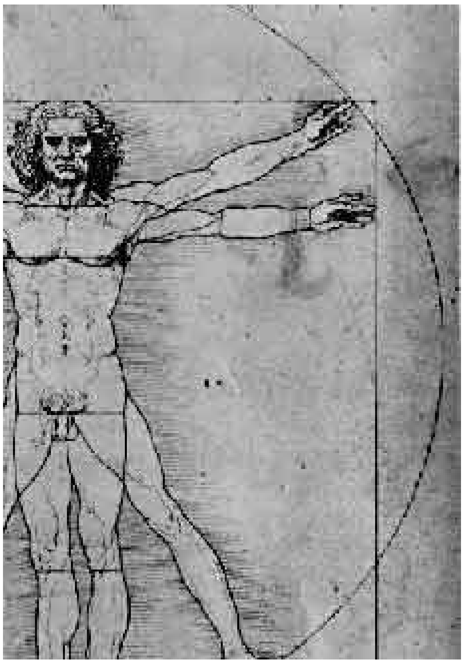


Fig 2

En la figura 3 se presenta el mismo dibujo abajo a la izquierda comparado con otro en el que el tamaño del cuadrado con relación al círculo es algo mayor





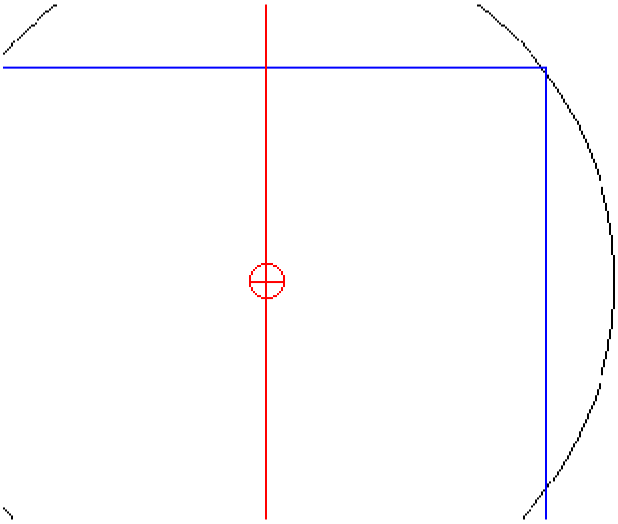


Fig 3

¿Cuál se parece mas al dibujo de Leonardo?... Yo estimo que el arriba. Y lo creo así cuando me fijo en las dos esquinas superiores del cuadrado que quedan "cortadas" por el círculo. En el dibujo original se las aprecia claramente. Si el trazado de Leonardo se hubiese ajustado a la construcción áurea tales esquinas serían apenas visibles.

El dibujo de Leonardo y la cuadratura del círculo

Y aquí entra en escena la estupenda página de Carlos Calvimontes: http://www.urbtecto.com/

Sabemos que el problema de la cuadratura del círculo ocupó y preocupó a Leonardo quien no solo estudió formas mecánicas de resolver el problema sino que llenó libretas de anotaciones con "cuadraturas".

Según Augusto Marinoni, *'El problema de geometría que absorbió a Leonardo interminablemente fue la cuadratura del círculo. A partir de 1504 en adelante dedicó cientos de páginas de sus cuadernos a esta cuestión ... que fascinó a su mentor Pacioli ... Mientras que estas investigaciones no produjeron apreciables progresos en matemáticas Leonardo creó una multiplicidad de complejos y preciosos diseños"*

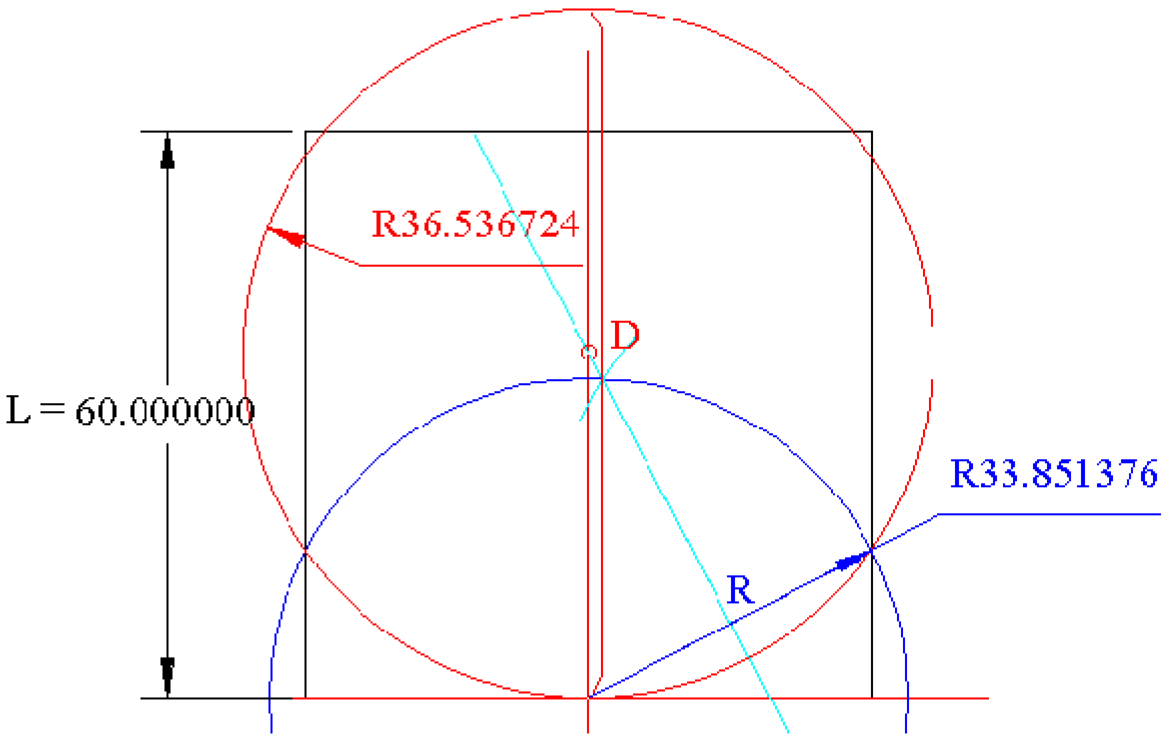
(traducido de http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit14/unit14.html)

¿Y QUE TIENE QUE VER ESTO CON NUESTRA PREGUNTA INICIAL?

La respuesta que nos da C.Calvimontes es bien sugestiva:

el círculo visible en el dibujo de Leonardo procede de una construcción relacionada con la cuadratura del círculo.

Fijémonos en la figura 4:



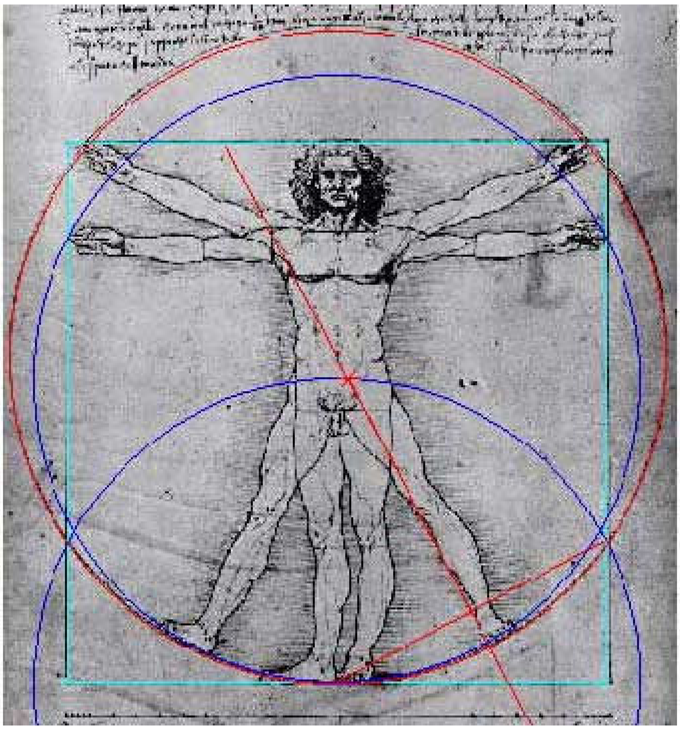


Fig 4

La propuesta de C.Calvimontes es que el **círculo visible de Leonardo corta al lado del cuadrado del tal forma que el segmento R** = distancia del punto tangente inferior al corte del lado **es el radio de un círculo** (oculto en el dibujo de Leonardo) **de igual área que el cuadrado**.

Se invita al lector a sacar una copia impresa del dibujo de Leonardo y verificar sobre él (la copia impresa debe guardar las proporciones) que la propuesta de C.Calvimontes *"si non e vero e ben trovato"*

.

Otras comprobaciones adicionales pueden hacerse en base a que el segmento R queda definido por la relación:

$$R^2 = \frac{D^2 - D\sqrt{D^2 - L^2}}{2}$$

(para cualquier par de valores D y L, si y solo si, D > L ya que si D<L la raíz es imaginaria y no hay punto de corte).

A partir de tal ecuación general puede deducirse:

$$\frac{L^2}{R^2} = 2 + \sqrt{4 - f^2}$$

Donde **f** representa la relación entre el lado y el radio del la figura de Leonardo, es decir:

$$\frac{L}{D/2} = f$$

Con estas herramientas, si C.Calvimontes tiene razón entonces:

$$\frac{L^2}{R^2} \approx \pi \quad \Rightarrow \quad f = 1.642...$$

Que difiere de la razón áurea en un 1.5% aprox.

Esta diferencia es por un lado lo suficientemente pequeña como para haber despistado hasta ahora a mucha gente empeñada en ver la razón áurea en el ombligo del hombre de Vitruvio, pero también lo bastante grande como para darnos cuenta que si Leonardo hubiese utilizado la construcción de la razón áurea expuesta en la figura 2 (construcción que sin duda conocía) el cuadrado no habría cortado al círculo dejando las esquinas superiores tan visibles.

La "circulatura" del cuadrado

En este punto, nos volvemos a preguntar: **¿cómo trazó Leonardo el círculo y el cuadrado de su dibujo?.**

A la vista de lo anterior podríamos suponer que siguió las etapas siguientes:

1. Partió del cuadrado que vemos...

2. ...halló el círculo de igual área (círculo que permaneció oculto)

3. Dibujó luego otro círculo de igual radio pero con centro en el punto medio del lado-base del cuadrado (ver fig. 4) y hallo los puntos de corte con los dos lados, derecho e izquierdo, del cuadrado

4. Trazó la mediatriz del segmento R y la prolongó hasta cortar el eje vertical hallando así el centro del círculo que finalmente es que aparece en su dibujo.

Para recorrer este camino Leonardo se habría planteado en el paso "2" **la cuadratura del círculo a la inversa, es decir, la circulatura del cuadrado**.

C.Calvimontes describe un camino tal como este. Pero lo hace asumiendo que Leonardo utilizó como apoyo un círculo de diámetro igual a pi. En este punto yo me permito (con todos mis respetos) discrepar.

Leonardo pudo haber encontrado la *circulatura* del cuadrado y utilizarla para su genial dibujo. Y ello sin recurrir al círculo de diámetro pi.

(Obsérvese que resulta algo raro recurrir a un círculo de diámetro pi cuando, tanto si buscamos la cuadratura del círculo como su inversa, el problema radica precisamente en halla una construcción de **pi**)

Las pistas que hacen verosímil la construcción que a continuación describo son las siguientes:

- ya ha habido autores que han señalado que los dedos índice y/o anular de las manos de los brazos horizontales parecen señalar unos puntos concretos de los lados del cuadrado. Y hay quien ya ha sugerido que señalan precisamente el punto de corte del "**circulo oculto**" con el cuadrado.
- Los puntos señalados por las manos horizontales están perfectamente alineados con un **trazo horizontal recto** (visible) a la altura de las clavículas y que parece formar la base de la cabeza.
- Hay otros dos trazos rectos horizontales también visibles en el dibujo: **uno de ellos** cruza el sexo y señala evidentemente **el centro del cuadrado** (dejo a los historiadores el significado de semejante "centro" tan estratégicamente ubicado); **el otro** une los pezones de los pectorales y resulta estar colocado justo en la mitad de la distancia del anterior al punto superior de la cabeza, es decir, **los pectorales están a ¾ de la altura**.

¿Son estas pistas fiables?, ¿de verdad Leonardo "señaló" su círculo oculto en el propio dibujo? ...

Empecemos por los puntos que **si** nos dejó señalados: **el centro del cuadrado** (el sexo), **O**, y el que queda a **medio camino hasta la cabeza**, **los pectorales**, el punto **F** (ver fig 5). Y sigamos los siguientes pasos:

1. Trazar el círculo con centro en F y radio ¼ del lado del

cuadrado de partida.

2. Trazar los ejes vertical y horizontal con origen en **O** y hallar los puntos medios de los segmentos a izquierda y derecha de **O**, es decir los puntos **M** y **M'**.

3. Unir los vértices superiores del cuadrado con los puntos **M** y **M'**

4. Las rectas así trazadas cortan al circulo anterior en los puntos **E** y **E'** que obviamente están alineados en horizontal. Mi hipótesis es que Leonardo nos dejo visible al menos una parte de este segmento EE'.

5. Prolongar **EE'** hasta cortar al lado y obtener así el punto **D**, precisamente el que está señalando la mano izquierda (la que vemos a nuestra derecha).

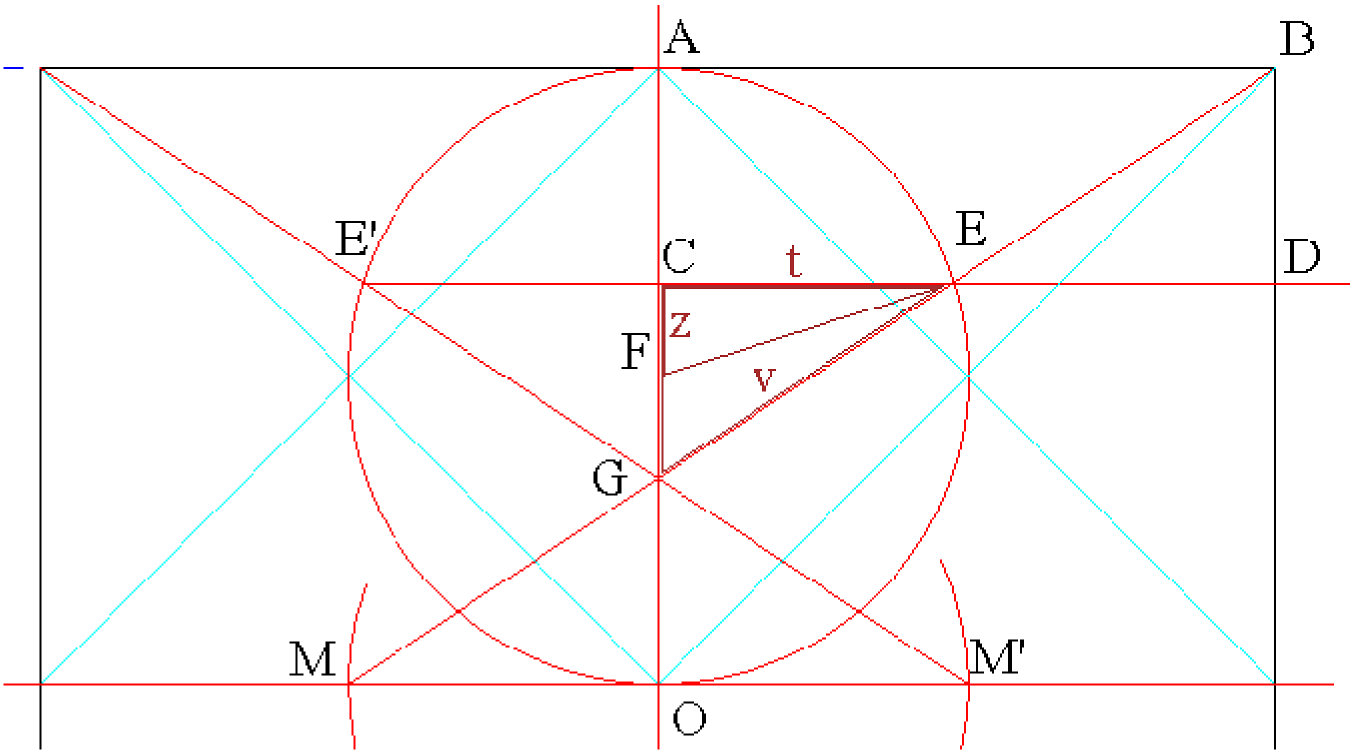


Fig 5

Para continuar debemos ahora fijarnos en la figura siguiente (la fig 6):

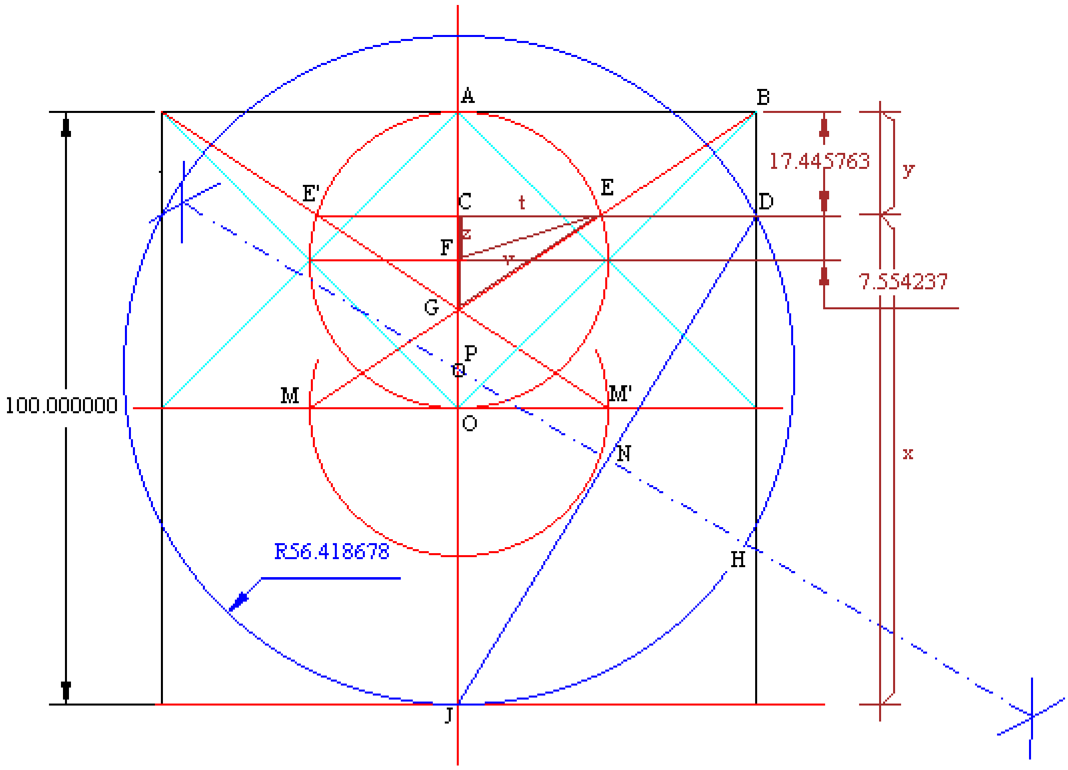


Fig. 6

Nota: las cotas aparecen multiplicadas por 100 para disponer de más cifras significativas. En lo que sigue, no obstante se asume que el lado del cuadrado de partida vale 1

6. Unir el punto **D** con el punto medio de la base del cuadrado **J**

7. Hallar la mediatriz de **DJ** y el corte de esta con el eje vertical, es decir el punto **P**

8. Con centro en **P** trazar el círculo de radio **PJ** = **HD**. Este círculo cortará obviamente al lado tanto en **H** como en **D** es decir el punto que señala la mano del hombre de Vitruvio.

Esta sería la construcción vista directamente sobre el hombre de Vitruvio:

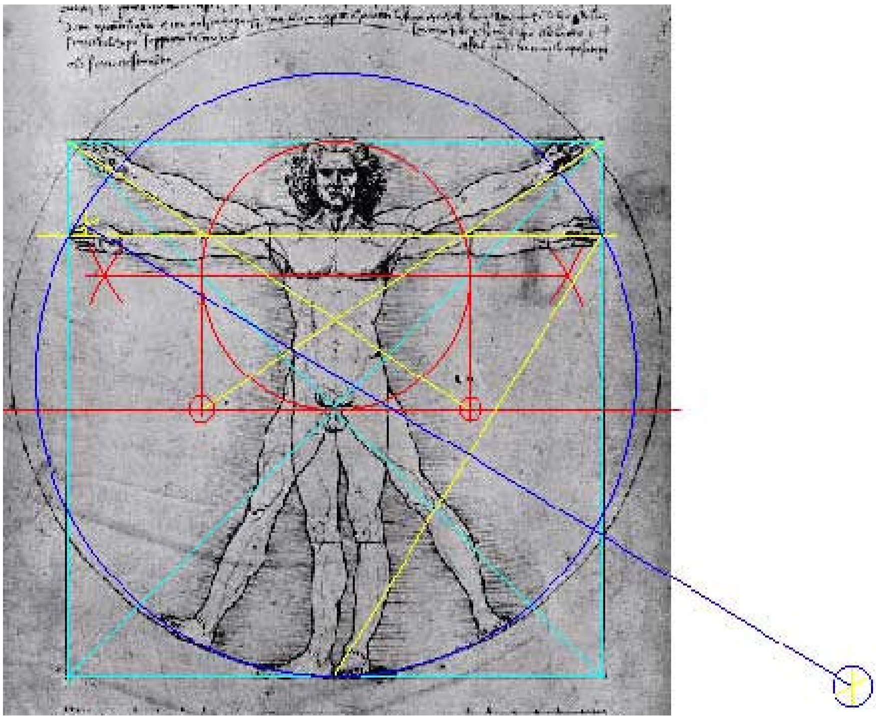


Fig. 7

¿SIGUIÓ REALMENTE LEONARDO ESTE CAMINO PARA OBTENER SU "CIRCULO OCULTO" A PARTIR DEL CUADRADO?

No lo sé. Esta construcción no la he encontrado en ninguna parte. Es de mi cosecha, siguiendo las pistas que dejo Leonardo. Les dejo a los historiadores con mas capacidad que yo de rebuscar los papeles de Leonardo, la tarea de ver si en alguno de sus múltiples cuadernos dejó alguna pista que permita verificar si fue esta la que realmente usó.

Por el momento, veamos que valor de **pi** se deduce de esta **circulatura**.

Volvamos a la figura 5. Los siguientes segmentos son fáciles de deducir:

$$\overline{AC} = \frac{1}{4} \qquad \overline{AB} = \frac{1}{2} \qquad \overline{AG} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{GB} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

Por Pitágoras en el triángulo **FCE**

$$z^2 + t^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Y aplicando Thales a los triángulos **GAB** y **GCE**

$$\frac{v}{\left(z + \frac{1}{12}\right)} = \frac{\sqrt{13}/6}{1/3} \quad ; \quad \frac{v}{t} = \frac{\sqrt{13}/6}{1/2}$$

Se tienen así tres ecuaciones con tres incógnitas: **v**, **t y z** de las que al despejar z nos queda:

$$z^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(z + \frac{1}{12}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Que nos da una ecuación de segundo grado en la que tomando la solución positiva obtenemos:

$$z = \frac{4\sqrt{3} - 3}{52} = 0.0755423698\ldots$$

Ahora ya estamos en disposición de averiguar el valor de **y**, es decir la distancia al vértice superior del punto **D**, que como se ve es la clave de esta construcción:

$$y = \frac{1}{4} - z = \frac{1}{4} - \frac{4\sqrt{3} - 3}{52} = \frac{4 - \sqrt{3}}{13} = 0.17445763\ldots$$

Conocido **y** conocemos **x**, ya que **y = 1-x**.

El siguiente paso nos lleva a los dos triángulos rectángulos y semejantes delimitados por **DJ**, x y la semibase y por **DJ**/2 y el punto **H**:

$$\frac{r}{\overline{DJ}/2} = \frac{\overline{DJ}}{x} \quad ; \quad x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \overline{DJ}^2$$

Despejando r obtenemos:

$$r = \frac{4\left(9+\sqrt{3}\right)^2 + 13^2}{104\left(9+\sqrt{3}\right)} = \frac{333+11\sqrt{3}}{624} = 0.56418679\ldots$$

Como hemos partido de un cuadrado de lado **1** (recuérdese que las cotas están multiplicadas por 100 en el dibujo) y por tanto área **1** tendríamos, si el círculo hallado "circula" a tal cuadrado, que:

$$1 \approx \pi \cdot r^2 \Rightarrow \pi \approx \frac{1}{r^2} = 3.14162373\ldots$$

Es decir, pi con un error relativo menor de 10 ppm

(otros prefieren expresar esta aproximación como cociente, tanto mas próximo a 1 como mejor sea la tal aproximación, en este caso resultaría = 1.00000989 que por cierto es bastante mejor que el que aparece en :

http://members.telocity.com/stephenssmith/UCSC/papers/Paper.html

y especialmente en:

http://www.leonardo2002.de/ehome/egeheim/egeheim.html

Por cierto, ¿se han fijado que en esta construcción no se echa mano de la razón áurea para nada?

¿De verdad no es tentador suponer que Leonardo halló esta **circulatura**?

Variaciones sobre el mismo tema

Que el círculo que venimos llamando "oculto" representa una "cuadratura" o si lo prefieren una "circulatura" es algo en lo que están de acuerdo tanto C.Calvimontes como Schröer & Irle, autores de la ya citada y sugestiva página:

http://www.leonardo2002.de/ehome/egeheim/egeheim.html

Por cierto, merece la pena reseñar que esta última presenta una explicación alternativa sobre el dibujo de Leonardo, según la cual el círculo y el cuadrado visibles serían miembros de sendas parejas de círculo y cuadrado asociados de forma iterativa. Mediante tal ingenioso proceso iterativo, concluyen estos autores, se obtendría también una cuadratura aproximada. El grado de aproximación que mencionan es (en su notación) de

1.00037 lo que equivale a unas 370 ppm.

Esta página **no** detalla algunos puntos interesantes, para los que me permito sugerir aquí alguna explicación.

La construcción que proponen se basa en dos círculos pequeños con cuyo auxilio se determinan precisamente los puntos de corte del círculo visible con el lado superior del cuadrado (fig 8):

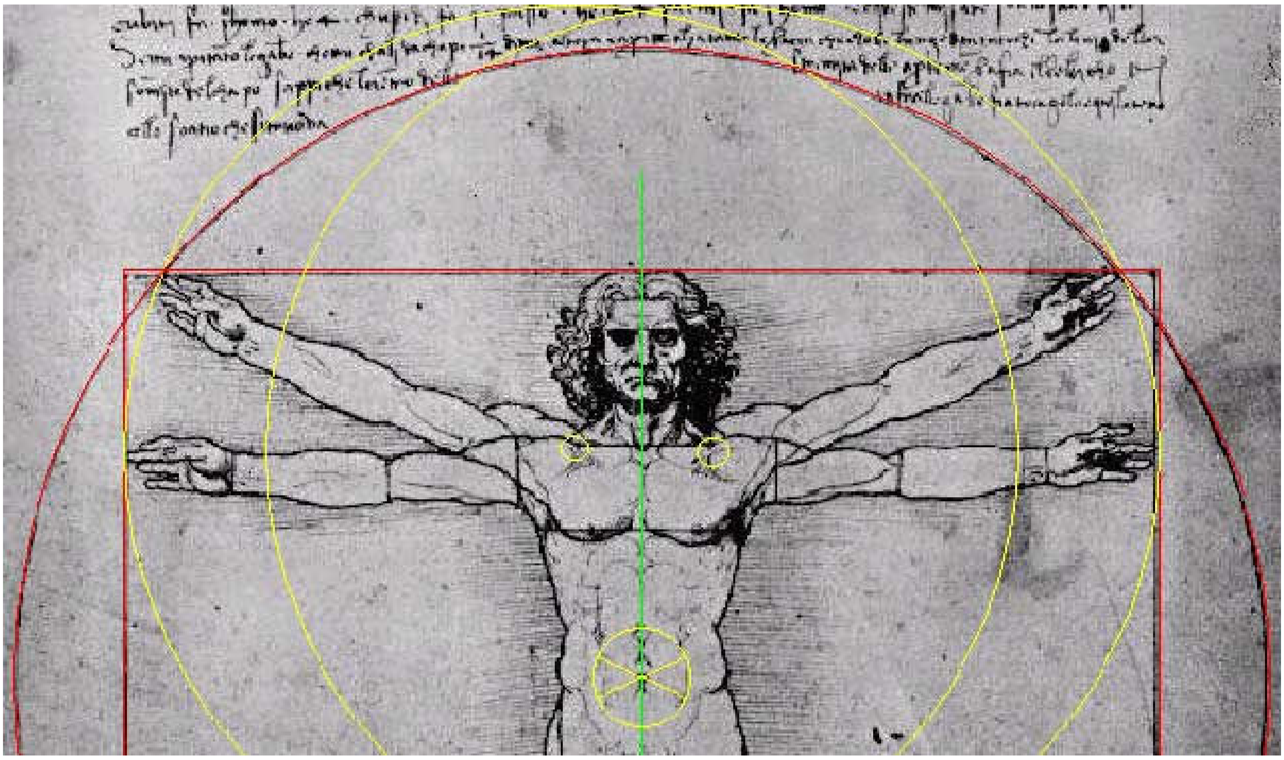


Fig 8

Schröer & Irle mencionan que tales círculos tienen sus respectivos centros en sendos puntos que aparecen apenas visibles en el trazo recto de la base del cuello. Pero no indican como obtener por construcción ni el tal trazo recto para el que he ofrecido mas arriba una posibilidad, ni tampoco como halló Leonardo tales centros.

Bien, una vez más me atrevo a ofrecer una posibilidad.

Retomemos la construcción tal como la dejamos en la figuras 6 y 7 para continuar en la figura 9

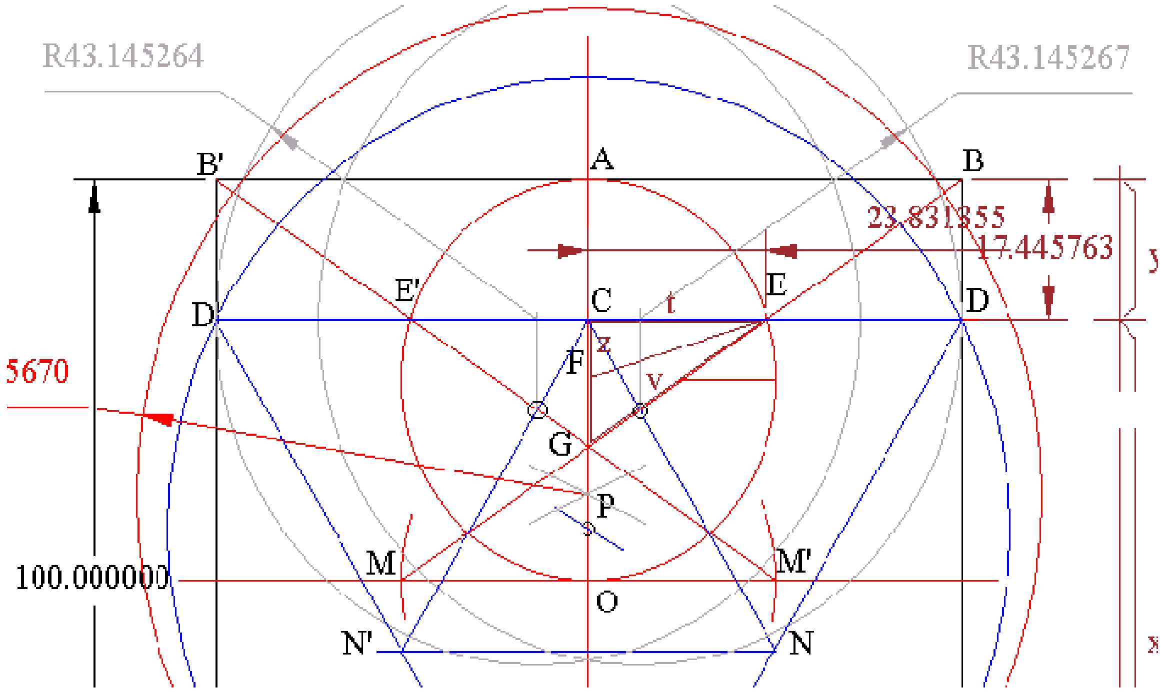


Fig 9

1. Completar el triángulo **D'JD,** es decir el formado por los extremos de los brazos y el tercer vértice en los pies.

2. Unir los puntos medios de los tres lados de **D'JD** y obtener así el triángulo pequeño interior **N'CN**.

3. Desde los respectivos cortes de los lados **CN** y **CN'** con los segmentos **B'M'** y **BM** levantar rectas verticales hasta cortar al segmento **D'D** (los "brazos extendidos"). Tales cortes son los dos centros buscados.

4. Trazar los círculos auxiliares con radio desde su centro hasta el lateral correspondiente.

5. Los círculos así trazados cortan al lado superior del cuadrado en los puntos por donde ha de pasar también el **círculo visible**

Sobre el dibujo original:

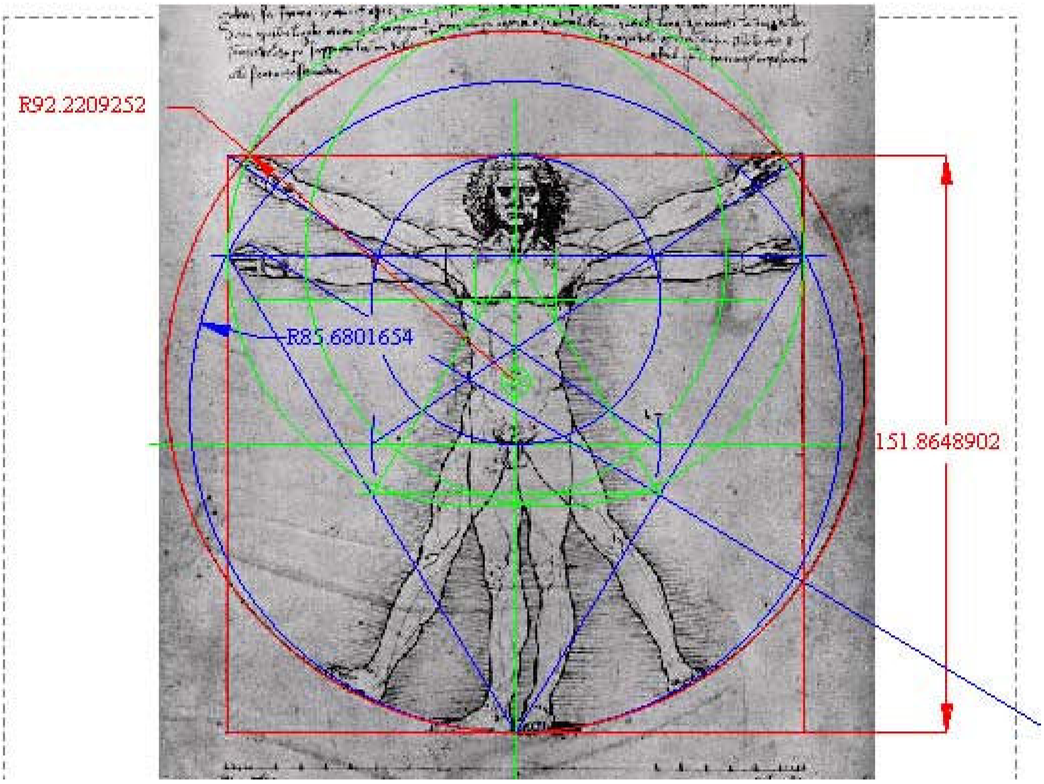


Fig 10

¿Qué diferencia hay entre esta construcción y la propuesta por C. Calvimontes?

No demasiada, la verdad.

Se puede demostrar matemáticamente que mediante esta construcción la razón f , ya definida mas arriba

$$\frac{L}{D/2} = f$$

Del lado del cuadrado al radio del círculo visible vale:

1.64675,

mientras que con la construcción indicada por Carlos se obtiene un f de

1.64216,

es decir ambas construcciones difieren en solo un 0.28%.

Desde luego es imposible decidir cual de las dos usó Leonardo (si es que las usó) por la simple comparación con las reproducciones disponibles de su dibujo. En ambos casos, p.ej., el centro del círculo visible cae perfectamente sobre el ombligo.

Conclusiones

1. El círculo y el cuadrado visibles en el dibujo de Leonardo **no están** casi con seguridad **relacionados exactamente por el número áureo**. Tal relación aparece solo aproximada, coincidencia de la que Leonardo probablemente se percató y que dejó mas o menos visible, tal vez con el propósito de ocultar un significado sin duda más profundo e importante para él.

2. Es más que probable que el hombre de Vitruvio esté de hecho señalando el círculo oculto, aquel cuya área es igual a la del cuadrado visible.

3. El círculo visible señala también al círculo oculto (por su intersección con el cuadrado o construcciones alternativas) y de paso, al tener su centro en el ombligo, permite que el dibujo siga el canon de Vitruvio y por su aproximación a la razón áurea, permite también incluirlo en la corriente renacentista que dio a la divina proporción su rango de canon de la belleza.

Nota final:
Este trabajo no habría sido posible sin el de Carlos Calvimontes. Quiero expresar aquí mi admiración y respeto por su trabajo. El que yo discrepe con él en cuanto a lo que él denomina "del cuadrado al círculo" no merma un ápice el valor de su trabajo.

Y por cierto es el turno de los historiadores... espero que Vds le den continuación a todo esto...

Carlos M Piera.

Madrid 21 marzo, 2002

RECOPILACIÓN ESPECIAL PARA LA "FUNDACIÓN ALBERT EINSTEIN" DE LA REPÚBLICA ARGENTINA.